מטרות התרגול:

א. הגדרה ופתירה של מערכת משוואות לינארית בעזרת מטריצה.

ב. מתי יש פתרון יחיד/ אין פתרון/ אין-סוף פתרונות.

ג. פתרון מערכת משוואות כאשר אחד מהמקדמים הוא פרמטר.

(בלי איברים כמו xy, x^2 וכו')

— כל מערכת משוואות לינאריות, ניתנת לכתיבה

בעזרת מטריצה.

דוגמא 1:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=1\\ x+4y+3z&=0\\ x+5y+4z&=2 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

מטריצת המקדמים

וקטור מקדמים חופשיים

השאלה: איזו ערכים של x, y, z פותרים

את מערכת המשוואות?

פעולה אלמנטרית: פעולה שאינה משנה את קבוצת הפתרונות.

← מכפי לפתור מערכת משוואות לינארית, ניתן להעלות

מ: 3 פעולות אלמנטריות:

א. החלפת סדר של שתי משוואות במערכת.

ב. החלפת אחת המשוואות, בכפולה של אותה המשוואה בקבוע (סקלר) שונה מאפס.

ג. החלפת אחת המשוואות בסכום שלה עם כפולה בסקלר של משוואה אחרת במערכת.

← השיטה לפתרון המערכת נקראת "שיטת החילוף של גאוס", או בשם "פירוק".

תרגיל 1: פתרו את מערכת

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+y=2 \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$$

המשוואות המאוגמנטות פירוש מטריצה.

פתרון: בשלב הראשון, נמיר את המשוואה למטריצה.

לאחר מכן, נפרק את המטריצה כך שלכל שורה יהיה איבר פותח, שהוא מוגדר להיות: א. שווה ל-1. ב. מתחתיו ומעליו יש אפסים. ג. כל מה שמשמאל-למעלה ממנו הוא אפס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

לצורך, השורה השניה משלמת:

$0\cdot x-3y-6z=0$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{-3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}}$$

כאן עובדים: המטריצה (של המקדמים) נהיית "מטריצה משולשית עליונית".

כלומר, הפתרון (היחיד) למערכת הוא:

ניתן לבדוק

הערה: סימון נוסף לפתרון:

$$\vec{x} = (0, 2, -1)$$

$x = 0$ $\quad$ $y = 2$ $\quad$ $z = -1$

נקרא "וקטור הפתרונות".

3 משתנים, 2 משוואות

תרגיל 2: פתרו את המערכת:

$$y+2z=0$$
$$2x+2z=0$$

פתרון: נרשום כמטריצה ונדרג:

לה אינו איבר פותח! בגלל האיבר הלה שונה מאפס

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x+z&=0 \\ y+2z&=0 \end{aligned}$$

עולים כי הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

מה הפתרון של המערכת?

$x+z=0$

$y+2z=0$

נשים לב שבמקרה הזה, יש יותר מפתרון יחיד למערכת.

לדוגמא, עבור $z=1$ נקבל: $x=-1$, $y=-2$ וניתן לבדוק שהן אכן פתרון של המערכת המקורית.

$\Rightarrow$ יש ∞ פתרונות למערכת. כדי למצוא את קבוצת הפתרונות, נסמן את z כשתנה "בלתי תלוי", ואת x, y כשתנים "תלויים": $x=-z$, $y=-2z$, כלומר קבוצת הפתרונות היא: $(-z, -2z, z)$ לכל z שתרצו (בדקו).

$x, y, z, \ldots$

הערה: כאשר מספר המשתנים **גדול** ממספר המשוואות,

אזי מתקיים אחד מהשניים:

א. יש ∞ פתרונות.

ב. אין פתרון כלל (0 פתרונות).

תרגיל 3: פתרו את מערכות המשוואות המצורפות:

א.
$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=1 \\ 3x+3y&=3 \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=1 \\ 3x+3y&=0 \end{aligned}$$

פתרון: א.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{-2} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר הפתרון הוא:

$$\boxed{x=1,\ y=0}$$

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=1 \\ 3x+3y&=0 \end{aligned}$$

מ.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

מכיוון שהגענו לשורת אפסים
עם מקדם חופשי שאינו אפס,
נצא מיד כי <u>אין פתרון למערכת.</u>

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = -3 \Rightarrow 0 = -3$$

סתירה!

תרגיל 4: פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר.

(מצאו את הפתרונות כפונקציה של a).

פתרון: נדרג כרגיל, ונצטרך לשים לב מאוחר יותר.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -1-\frac{1}{a} & 1 \end{array}\right)$$

עבור $a \neq 0$!
(בסוף נבדוק מה קורה עבור $a=0$ בנפרד).

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \cdot \frac{1}{(-1-\frac{1}{a})}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-a}{a+1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{a}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{a}\cdot\frac{(-a)}{a+1} \\ 0 & 1 & \frac{-a}{a+1} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{a+1} \\ y = \frac{-a}{a+1} \end{array}$$

$-1-\frac{1}{a} \neq 0$ עבור
$(a \neq -1)$

$\frac{1}{a+1}$

(לבדוק שבודה)

לסיכום, הפתרון הוא:

א. עבור $a \neq 0, a \neq -1$: $\boxed{x = \frac{1}{a+1},\ y = \frac{-a}{a+1}}$

ב. עבור $a = 0$ $\boxed{x = 1,\ y = 0.}$ (נפקו)

ג. עבור $a = -1$, נקבל שורת אפסים עם מקדם חופשי שאינו אפס (נפקו), ולכן $\boxed{\text{אין פתרון}}$